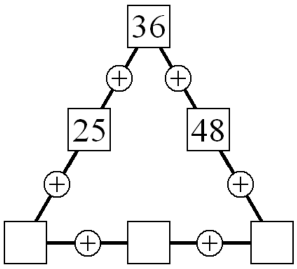
58. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z9, okresné kolo, riešenia

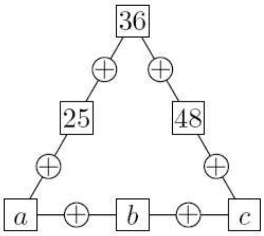
Z9-II-1

Do troch prázdnych štvorcov na obrázku patria také prirodzené čísla, aby súčet troch čísel na každej strane trojuholníka bol rovnaký. Koľko rôznych trojíc prirodzených čísel je možné do obrázka doplniť?



(L. Šimůnek)

Možné riešenie: Čísla patriace do prázdnych polí označme po rade *a, b, c*.



Zo súčtu na ľavej strane trojuholníka odvodíme:
$a = (36 + 48 + c) - (36 + 25) = c + 23$. Ak je *c* prirodzené číslo, je hodnota výrazu *c* + 23 tiež prirodzené číslo.
Podobne vyjadríme pomocou premennej *c* i premennú *b*, teda:
$b = (36 + 48 + c) - (c + c + 23) = 61 - c$.
Aby hodnota výrazu 61 − *c* bola prirodzené číslo musí byť *c* menej ako 61. Za *c* teda môžeme dosadzovať prirodzené čísla od 1 do 60.
Existuje 60 rôznych možných doplnení čísel do štvorčekov.

a	24	25	...	83
b	60	59	...	1
c	1	2	...	60

INÉ RIEŠENIE:
Za číslo *c* dosadíme najmenšie možné číslo, teda jednotku. Potom *a* musí byť 24 a následne *b* musí byť 60. Postupne zväčšujme hodnotu dosadenú za *c*. týmto spôsobom postupne vypíšeme všetky trojice možných doplnených čísel...

Hodnotenie:
1 bod za uvedenie aspoň jedného riešenia.
2 body za uvedenie počtu riešení
3 body za zdôvodnenie počtu riešení

Z9-II-2

Nočný strážnik si na skrátenie času v službe písal postupnosť čísel. Začal istým prirodzeným číslom. Každý ďalší člen postupnosti vytvoril tak, že k predchádzajúcemu číslu pričítal určité číslo: k prvému členu pričítal 1, k druhému 3, k tretiemu 5, k štvrtému 1, k piatemu 3, k šiestemu 5, k siedmemu 1 a tak ďalej. Vieme, že sa v jeho postupnosti nachádzajú čísla 40 a 874.

a) Ktoré číslo nasleduje v postupnosti priamo po čísle 40 a ktoré priamo po čísle 874?

b) V postupnosti nájdeme dva priamo po sebe idúce členy, ktorých súčet je 491. Ktoré dve čísla to sú?

(L. Šimůnek)

Možné riešenie: Strážnik teda písal takúto postupnosť čísel:

$x, x+1, x+1+3, x+1+3+5, x+1+3+5+1, \ldots$

$x, x+1, x+4, x+9, x+10, x+13, x+18, x+19, x+22, x+27, x+28, x+31, x+36 \ldots$

a) Medzi dvomi číslami postupnosti sa nachádzajú čísla, ktoré vznikli pripočítaním jednotky, trojky a päťky. Teda medzi číslami 40 a 874 bola *k*-krát pripočítaná jednotka, *l*-krát pripočítaná trojka, *m*-krát pripočítaná pätorka. Vzťahy medzi prirodzenými číslami *k, l, m* sú dané tým, ktoré číslo sa pripočítavalo k 40 a pripočítaním ktorého čísla vzniklo číslo 874.

prvé pripočí-tané	posledné pripočíta-né	vzťahy	rovnica	výsledok
1	1	$l=k-1 \quad m=k-1$	$k+3.(k-1)+5.(k-1)=874-40$	$k \notin N$
1	3	$l=k \quad m=k-1$	$k+3.k+5.(k-1)=874-40$	$k \notin N$
1	5	$l=k \quad m=k$	$k+3.k+5.k=874-40$	$k \notin N$
3	1	$l=k \quad m=k$	$k+3.k+5.k=874-40$	$k \notin N$
3	3	$l=k+1 \quad m=k$	$k+3.(k+1)+5.k=874-40$	$k \notin N$
3	5	$l=k+1 \quad m=k+1$	$k+3.(k+1)+5.(k+1)=874-40$	$k \notin N$
5	**1**	$l=k-1 \quad m=k$	$k+3.(k-1)+5.k=874-40$	$k=93$
5	3	$l=k \quad m=k$	$k+3.k+5.k=874-40$	$k \notin N$
5	5	$l=k \quad m=k+1$	$k+3.k+5.(k+1)=874-40$	$k \notin N$

Existuje jediná postupnosť vyhovujúca zadaniu. V nej po čísle 40 nasleduje číslo 45 a po čísle 874 nasleduje číslo 877. (Úvaha môže vychádzať i z toho, že v každej za sebou idúcej štvorici sa prvé a štvrté číslo líšia o 9.)

b) Medzi číslami, ktoré dali súčet 491 môže byť rozdiel 1, 3, alebo 5 a zároveň musia patriť do strážnikovej postupnosti. Takže hľadané čísla môžu byť 245 a 246, alebo 244 a 247, alebo 243 a 248. Musíme nájsť, ktoré z týchto čísel sú v postupnosti. Nájdeme najbližšie ľahko zistiteľné číslo menšie ako 243, ktoré v postupnosti určite je. To sa dá, ak k 40 pripočítame vhodný násobok 9. $40+22.9=238$. Potom musíme pokračovať pripočítaním 5, 1, 3, 5, ...
Takže nasledujú čísla: 243, 244, 247, 252, ...
Hľadané čísla sú 244 a 247.

Hodnotenie:

2 body za správne riešenie a)
2 body za postup (zdôvodnenie, resp. vypísanie všetkých možností) časti a)
2 body za správne riešenie a zdôvodnenie b)

Z9-II-3

Vojto Vodník sa bavil tým, že prelieval vodu medzi tromi nádobami. Najprv prelial po jednej tretine vody z druhej nádoby do prvej a tretej. Potom prelial po jednej štvrtine vody z prvej nádoby do druhej a tretej a nakoniec ešte po jednej pätine vody z tretej nádoby do prvej a druhej nádoby. Nakoniec zostalo v každej nádobe po 1 litre vody. Koľko vody mal Vojto pôvodne v jednotlivých nádobách?

(M. Petrová)

Možné riešenie: Úloha sa dá najlepšie riešiť odzadu.
Ak pri poslednom prelievaní bolo brané po jednej pätine objemu z tretej nádoby, tak výsledný jeden liter tvorí tri pätiny jej predchádzajúceho objemu vody. Čiže pred preliatím bolo v prvej nádobe $\frac{2}{3}$ l vody, v druhej $\frac{2}{3}$ l vody a v tretej $\frac{5}{3}$ l vody.

Druhé prelievanie odčerpalo dve štvrtiny vody z druhej nádoby, čiže teraz tam je iba polovica vody. Takže sa prelievalo po $\frac{1}{3}$ l vody. Pred druhým prelievaním bolo: v prevej nádobe $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ l vody, v druhej $\frac{4}{3}$ l vody a v tretej $\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ l vody.

Prvé prelievanie odčerpalo vodu z prvej nádoby tak, že v nej ostala iba $\frac{1}{3}$ pôvodného objemu vody. Keďže v nej máme $\frac{1}{3}$ l, tak sme museli prelievať presne po $\frac{1}{3}$ l.

Pred prvým prelievaním bolo v nádobách:
v prvej $\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$ l vody, v druhej $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$ l vody, v tretej $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$ l vody.

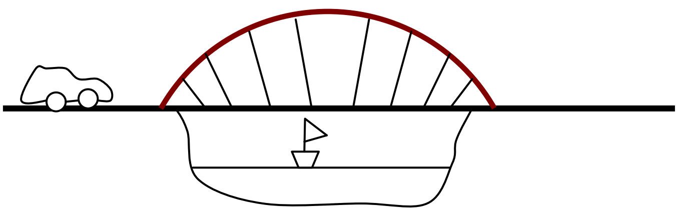
Pred prelievaním mal Vojto Vodník v každej nádobe 1 l vody.

INÉ RIEŠENIE:
Postupujeme od začiatku. Nech v prvej nádobe je na začiatku *x* litrov, v druhej *y* litrov a v tretej *z* litrov vody. Celé prelievanie znázorníme v tabuľke.

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
na začiatku	x	y	z
1. prelievanie	$+\frac{1}{3}y$	$-\frac{2}{3}y$	$+\frac{1}{3}y$
po preliatí	$x+\frac{1}{3}y$	$+\frac{1}{3}y$	$\frac{1}{3}y+z$
2. prelievanie	$-\frac{2}{4}\left(x+\frac{1}{3}y\right)$	$+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{3}y\right)$	$+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{3}y\right)$
po preliatí	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}y$	$\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y$	$\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y+z$
3. prelievanie	$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y+z\right)$	$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y+z\right)$	$-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y+z\right)$
po preliatí = na konci	$\frac{11}{20}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=1$	$\frac{3}{10}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{5}z=1$	$\frac{3}{20}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{5}z=1$

Riešením sústavy z posledného riadka tabuľky je $x=y=z=1$.

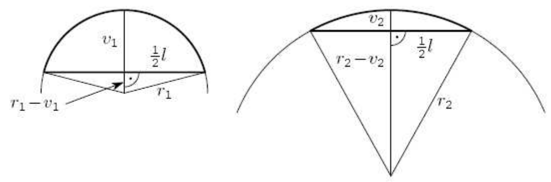
Hodnotenie:
Prvý spôsob riešenia:
1 bod za prvé spočítané preliatie,
po 2 body za každé ďalšie preliatie
1 bod za dokončenie
Druhý spôsob riešenia:
4 body za úplnú tabuľku (resp. vyjadrenie stavov po preliatí pomocou premenných)
2 body za doriešenie sústavy rovníc



Z9-II-4

V Kocúrkove plánovali postaviť ozdobný most ponad rieku. Jeho oblúk (viď obrázok) mal byť časťou kružnice. Tento oblúk spolu s vozovkou ohraničuje kruhový odsek. V pôvodnom návrhu bola ale výška oblúku mosta príliš veľká. Postavili teda most, ktorého výška oblúku bola trikrát menšia, tým sa však polomer príslušnej kružnice dvakrát zväčšil. V akom pomere bola výška oblúku mosta a polomer príslušnej kružnice v návrhu a v akom u postaveného mostu?

(M. Petrová)



Možné riešenie: Vychádzajme z obrázkov a označenia vyššie. Dĺžka *l* vozovky mostu ostáva v oboch prípadoch rovnaká. Mení sa výška oblúka z v_1 na v_2 a polomer z r_1 na r_2.

Stred kružnice na ktorej leží oblúk mosta a krajné body vozovky mosta (tetivy kružnice) tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka so základňou dĺžky *l*. Potom podľa Pytagorovej vety platí:

$$\left(\tfrac{l}{2}\right)^2 = r_1^2 - (r_1 - v_1)^2 = 2r_1v_1 - v_1^2$$

$$\left(\tfrac{l}{2}\right)^2 = r_2^2 - (r_2 - v_2)^2 = 2r_2v_2 - v_2^2$$

Potom porovnaním získame:

$$2r_1v_1 - v_1^2 = 2r_2v_2 - v_2^2$$

Do tejto rovnice môžeme doplniť vzťahy známe zo zadania: $v_1 = 3v_2$ a $r_2 = 2r_1$.

Postupne upravujeme:

$$2r_1.3v_2 - (3v_2)^2 = 2.2r_1.v_2 - v_2^2$$

$$6r_1v_2 - 9v_2^2 = 4r_1v_2 - v_2^2$$

$$2r_1v_2 = 8v_2^2$$

$$r_1v_2 = 4v_2^2 \qquad \text{nakoľak } v_2 \text{ je kladné}$$

$$r_1 = 4v_2$$

Dostali sme vzťah medzi pôvodným polomerom a výslednou výškou. Ak použijeme vzťahy zo zadania, dostaneme:

$$r_2 = 2r_1 = 2.4v_2 = 8v_2$$

Pomer v návrhu je: $v_1 : r_1 = (3v_2) : (4v_2) = 3 : 4$,

pomer v zrealizovanom moste je: $v_2 : r_2 = v_2 : (8v_2) = 1 : 8$.

Hodnotenie:

1 bod za správne použitie Pytagorovej vety;
1 bod za porovnanie dĺžok mostu;
1 bod za vzťahy zo zadanie;
1 bod za odvodenie vzťahu $r_1 = 4v_2$ alebo za analogický vzťah;
po 1 bode za každý výsledný pomer.