58. ročník Matematickej olympiády

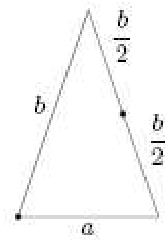
Kategória Z8, okresné kolo, riešenia

Z8–II–1

Pri lese, ktorý mal tvar rovnoramenného trojuholníka, sa u jedného z jeho vrcholov utáborili Ivo a Peter. Uprostred protiľahlej strany bola studnička. Chlapci sa rozhodli, že k nej nepôjdu lesom, ale po jeho obvode. Každý vyšiel iným smerom, ale obaja rýchlosťou 4 km/h. Ivo dorazil k studničke za 15 minút, Peter za 12 minút. Zisti dĺžky strán trojuholníka lesa. (Dĺžky strán zaokrúhlite na celé metre.)

(M. Volfová)

Riešenie: Chlapci nemohli táboriť pri vrchole oproti základni rovnoramenného trojuholníka, to by išli k studničke rovnako dlho. Na obrázku sú vyznačené umiestnenia stanu a studničky, dĺžky ramien *b* a základne *a*.



Zo zadania vieme, že Ivo išiel 1/4 hodiny rýchlosťou 4 km/h, prešiel teda 1 km. Petr išiel 12 minút, t.j. 1/5 hodiny, rýchlosťou 4 km/h, prešiel teda 4/5 = 0,8 (km). Teraz musíme uvažovať nasledujúce dve možnosti:

1. Ivo vyrazil po ramene, Petr po základni trojuholníka.
V tomto prípade prešiel
Ivo $b + b/2 = 1$ (km) a Petr $a + b/2 = 0{,}8$ (km).
Odtiaľ dopočítame $b = 2/3$ (km), čiže po zaokrúhlení na celé metre $b = 667$ m. Po dosadení do druhej rovnosti dostávame $a + 667/2 = 800$ (m), t.j. a = 800 – 333,5 = 467,5 (m), zaokrúhlene $a = 468$ m.
Strany trojuholníka majú približne dĺžky 667, 667 a 468 (m).
Poznámka: Ak žiaci budú pracovať pri výpočtoch so zlomkami a nepoužijú pre výpočet základne zaokrúhlenú hodnotu ramena, prídu k výslednej dĺžke základne 467 m.

2. Petr vyšiel po ramene, Ivo po základni trojuholníka.
V tomto prípade prešiel Petr $b + b/2 = 4/5 = 0{,}8$ (km) a Ivo $a + b/2 = 1$ (km).
Dopočítame $1{,}5b = 0{,}8$ (km) a $b = 0{,}53333$ (km), zaokrúhlené $b = 533$ m.
Po dosadení do druhej rovnosti dostávame $a + 0{,}533/2 = 1$ (km),
t.j. $a = 1 – 0{,}2665$ (km), zaokrúhlené $a = 734$ m.
Strany trojuholníka merajú približne 533, 533 a 734 (m).
Poznámka: Ak žiaci budú pracovať pri výpočtoch so zlomkami a nepoužijú pre výpočet základne zaokrúhlenú hodnotu ramena, prídu k výslednej dĺžke základne 733 m.

Hodnotenie: 2 body za rozbor situácie a výpočet vzdialeností, ktoré obaja chlapci prešli; po 2 bodoch za výpočet rozmerov lesa v každej z oboch situácií.

Z8–II–2

Eva písala za sebou idúce prirodzené čísla: 1234567891011... Ktorá číslica by bola zapísaná na 2 009-tom mieste Evinho čísla?

(M. Volfová)

Riešenie: Jednociferných čísel je 9 (1 až 9) a na ich napísanie je potreba 9 číslic. Dvojciferných čísel je 90 (10 až 99) a ich napísanie je potreba 180 číslic. Trojciferných čísel je 900 (100 až 999) a ich napísanie je potreba 2 700 číslic. Na napísanie všetkých jednociferných a dvojciferných čísel je potreba 189 číslic; 2 009. číslica bola použitá u niektorého trojciferného čísla.
Počet číslic, ktoré boli použité na vytvorenie trojciferných čísel, je 2 009−189 = 1 820.

Keďže 1 820 : 3 = 606 (zvyšok 2), je 2 009. číslica v Evinom čísle druhou číslicou 607. trojciferného čísla.
Prvé trojciferné číslo je 100, druhé trojciferné číslo je 101 = 100+1, tretie trojciferné číslo je 102 = 100+2. . . Podobne 607. trojciferné číslo je 100+606 = 706 a jeho druhá číslica je 0. Eva teda na 2 009. mieste napísala nulu.
Hodnotenie: 1 bod za určenie počtu číslic potrebných na napísanie jednociferných a dvojciferných čísel (t.j. 189);
1 bod za zistenie, že na napísanie všetkých trojciferných čísel je potreba 2700 číslic;
1 bod za záver, že hľadané číslo musí byť trojciferné;
2 body za poznatok, že hľadaná číslica je v 607. trojcifernom čísle;
1 bod za nájdenie číslice 0 v čísle 706.

Z8–II–3
Tri dané prirodzené čísla sú zoradené podľa veľkosti. Určite tieto čísla na základe nasledujúcich informácií:
• priemer daných troch čísel je rovný prostrednému z nich,
• rozdiel niektorých dvoch daných čísel je 321,
• súčet niektorých dvoch daných čísel je 777.

(L. Šimůnek)

Riešenie: Prostredné hľadané prirodzené číslo označme x. Aby bol priemer všetkých troch čísel rovný x, musí byť tretie číslo o toľko väčšie ako x, o koľko je prvé číslo menší ako x. Hľadané čísla preto môžeme označiť $x - a, x, x + a$, kde a je nejaké prirodzené číslo. Podľa zadania je rozdiel niektorých dvoch hľadaných čísel 321. Rozdiel dvoch po sebe idúcich čísel je a, rozdiel prvého a tretieho čísla je $2a$. Číslo 321 je nepárne, rozdiel 2a je párny, preto $2a$ nemôže byť 321, a teda nutne $a = 321$. Hľadané čísla sú $x - 321$, x, $x + 321$.
Súčet niektorých dvoch hľadaných čísel má byť 777. Súčet prvého a druhého je $2x - 321$, súčet druhého a tretieho je $2x + 321$, súčet prvého a tretieho je $2x$. Súčet $2x$ je párny, preto $2x$ nemôže byť 777. Aj možnosť $2x + 321 = 777$ zavrhneme, lebo potom by bolo $x = 228$, a teda prvé hľadané číslo by bolo záporné. Preto môže platiť jedine $2x - 321 = 777$, odkiaľ $x = 549$.
Hľadané čísla sú 228, 549, 870.
Hodnotenie: 1 bod za úvahu o priemere;
1 bod za úvahu o rozdiele 321;
2 body za úvahu o súčte 777;
2 body za správny záver.