

58. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z7, okresné kolo, riešenia

Z7-II-1

Rado číta zaujímavú knižku. Včera prečítal 15 strán, dnes ďalších 12 strán. S údivom si uvedomil, že súčet čísel strán, ktoré prečítal včera, je rovnaký ako súčet čísel strán, ktoré prečítal dnes. Zisti číslo na stránke, ktorou začne najbližšie čítanie? (Rado pri čítaní žiadne stránky nepreskakuje ani nečíta žiadnu stránku dva a viackrát. Každodenné čítanie nikdy neskončí rozčítanou stránkou.)

(M. Petrová)

Riešenie: Je zrejmé, že strany, ktoré Rado prečítal dnes, majú väčšie čísla ako tie, ktoré prečítal včera. Prvá dnes prečítaná strana má číslo o 15 väčšie ako prvá strana prečítaná včera. („Medzi nimi je ostatných 14 strán, ktoré prečítal včera.“) Druhá dnes prečítaná strana má opäť číslo o 15 väčšie než druhá včera prečítaná strana. (Číslo každej z nich sa zvýšilo o jedna.) Takto môžeme uvažovať ďalej — všetko je symbolicky znázornené v nasledujúcej schéme:

Včera	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
Prírastok hodnoty	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15			
Dnes	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.			

Súčet čísel strán prečítaných včera má byť rovný súčtu čísel strán prečítaných dnes, preto musí byť súčet čísel na 13., 14. a 15. včera prečítanej strane rovný súčtu prírastku hodnoty dvanástich strán. To znamená, že súčet čísel z posledných troch včera prečítaných strán je rovný $12 \cdot 15 = 180$. Odtiaľ strany majú čísla 59, 60 a 61. Ľahko dopočítame, že Rado včera prečítal strany s číslami 47 až 61, dnes s číslami 62 až 73. Najbližšie začne čítať stránku s číslom 74.

Hodnotenie: 3 body za akúkoľvek formu vyššie uvedenej schémy;
2 body za určenie prečítaných stránok;
1 bod za výsledok.

Z7-II-2

Tajný agent sa snaží rozlúštiť prístupový kód. Zatiaľ získal tieto informácie:

- je to štvorciferné číslo,
- nie je deliteľné siedmimi,
- číslica na mieste desiatok je súčtom číslice na mieste jednotiek a číslice na mieste stoviek,
- číslo vytvorené z prvých dvoch číslic kódu (v tomto poradí) je pätnásťnásobkom poslednej číslice kódu,
- prvá a posledná číslica kódu (v tomto poradí) tvoria prvočíslo.

Stačia mu tieto informácie na rozlúštenie kódu? Svoj záver zdôvodni.

(M. Petrová)

Riešenie: Uvedené informácie budeme využívať v takom poradí, aby nám v daný okamžik pomohli čo najviac. Podľa prvej informácie hľadáme štvorciferné číslo a podľa štvrtej informácie vypíšeme možnosti, ktoré prichádzajú do úvahy:

- 1 5 □ 1
- 3 0 □ 2
- 4 5 □ 3
- 6 0 □ 4
- 7 5 □ 5
- 9 0 □ 6

(Ďalšia možnosť už nie je, lebo $15 \cdot 7 = 105 > 99$.)

Podľa tretej informácie doplníme chýbajúcu číslicu:

1 5 6 1

3 0 2 2

4 5 8 3

6 0 4 4

7 5 \square 5 nedá sa doplniť

9 0 6 6

Podľa druhej informácie hľadáme tie čísla, ktoré nie sú deliteľné siedmimi:

1 5 6 1 nevyhovuje

3 0 2 2 vyhovuje

4 5 8 3 vyhovuje

6 0 4 4 vyhovuje

9 0 6 6 vyhovuje

Podľa piatej informácie vytvoríme uvedené dvojčiferné čísla a vyberieme tie možnosti, kedy dostaneme prvočíslo:

3 0 2 2 vytvoríme 32, nevyhovuje

4 5 8 3 vytvoríme 43, vyhovuje

6 0 4 4 vytvoríme 64, nevyhovuje

9 0 6 6 vytvoríme 96, nevyhovuje

Zo všetkých štvorciferných čísel splňuje uvedených päť podmienok jediné číslo, a to 4583.

To znamená, že uvedené informácie tajnému agentovi na rozlúštenie prístupového kódu stačia.

Poznámka. Pokiaľ pri riešení použijeme pätou informáci dříve než druhou, vyloučíme tím všechna sudá čísla (vytvořené dvojmístné číslo bude sudé, tedy to nebude prvočíslo). Na prověřování dělitelnosti sedmi pak zbývají čísla 1561 a 4583.

Hodnotenie: 2 body za vytipovanie čísel na základe štvrtej informácie;

3 body za postupné vylučovanie čísel na základe ďalších informácií;

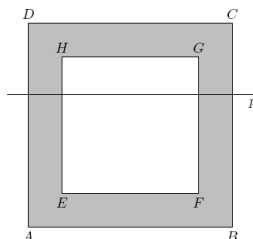
1 bod za vysvetlenie, že informácie agentovi stačia.

Z7-II-3

Na obrázku je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 10 cm a menší štvorec $EFGH$, ktorého vrcholy E, F, G, H ležia na uhlopriečkach AC, BD štvorca $ABCD$ (pozri obrázok).

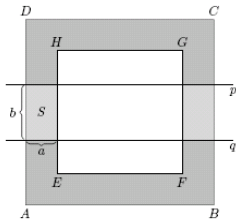
Plocha, ktorá leží vnútri štvorca $ABCD$ a pritom mimo štvorca $EFGH$, je šedo vyznačená. Priamka p , ktorá je rovnobežná s AB , od AB vzdialená 6,5 cm a prechádza štvorcem $EFGH$, rozdeľuje šedú plochu na dve časti. Obsah jednej tejto časti je o $13,8 \text{ cm}^2$ väčší než obsah druhej.

Vypočítajte dĺžku strany EF .



(L. Šimůnek)

Riešenie: Rovnobežné priamky p a DC majú vzdialenosť 3,5 cm. Vo vzdialenosti 3,5 cm od priamky AB vedme priamku q , ktorá prechádza štvorcem $EFGH$.



Priamky p a q ohraničujú z šedej plochy dva zhodné obdĺžniky, ktoré spoločne predstavujú zadaný rozdiel obsahov. Obsah jedného z nich označme S , jeho strany a a b (pozri obrázok).

Vypočítame S , b , a nakoniec a :

$$S = 13,8 : 2 = 6,9 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$b = 10 - 2 \cdot 3,5 = 3 \text{ (cm)},$$

$$a = S : b = 6,9 : 3 = 2,3 \text{ (cm)}.$$

Dĺžka strany EF je $10 - 2a$, t.j. $10 - 2 \cdot 2,3 = 5,4 \text{ (cm)}$.

Hodnotenie: 2 body za pomocnú priamku;

3 body za dĺžku strany a ;

1 bod za dĺžku strany EF .