

58. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z6, okresné kolo

Z6-II-1

Katka chce obdarovať svoje kamarátky a rozmýšľa: keby som každej kúpila sponku za 2,80 €, ostalo by mi ešte 2,90 €, ale keby to bd medvedík za 4,20 €, tak by mi ešte 1,30 € chýbalo. Koľko má Katka kamarátok a koľko peňazí na darčeky?

(M. Volfová)

Riešenie: Rozdiel v cene darčiekov pre jednu kamarátku je $4,20 - 2,80 = 1,40$ (€). Rozdiel v celkovej cene, ktorú by Katka za darčeky pre všetky kamarátky zaplatila, je $2,90 + 1,30 = 4,20$ (€). Ak vynásobíme rozdiel v cene darčeka pre jednu kamarátku počtom kamarátok, dostaneme rozdiel v celkovej cene. Preto počet kamarátok určíme ako výsledok delenia rozdielu celkovej ceny rozdielom ceny oboch darčiekov, t.j. $4,20 : 1,40 = 3$. Katka má 3 kamarátky.

Keby všetkým kúpila sponku za 2,80 €, ostalo by jej 2,90 €, takže mala $3 \cdot 2,80 + 2,90 = 8,40 + 2,90 = 11,30$ (€).

Alebo: keby všetkým kúpila medvedíka za 4,20 €, chýbalo by jej 1,30 € a mala by $3 \cdot 4,20 - 1,30 = 12,60 - 1,30 = 11,30$ (€).

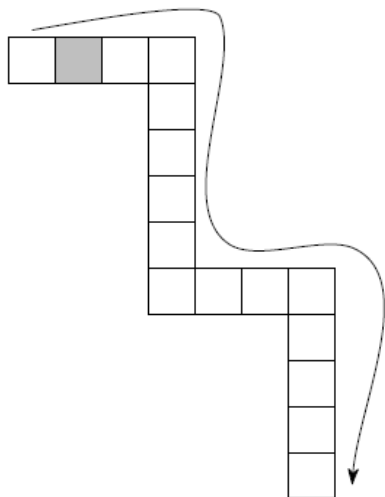
Hodnotenie: 1 bod za rozdiel cien darčiekov pre jednu kamarátku (t.j. 1,40 €);

2 body za celkový rozdiel pre všetky kamarátky (t.j. 4,20 €);

2 body za určenie a zdôvodnenie počtu kamarátok;

1 bod za stanovenie koľko peňazí má Katka na darčeky.

Z6-II-2



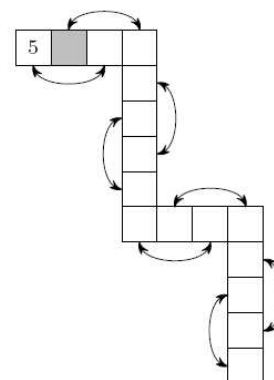
Na kocku sme na každú stenu napísali prvočíslo menšie ako 20. Potom sme zistili, že súčet každých dvoch čísel ležiacich na protiľahlých stenách je vždy rovnaký. Kocku sme položili na prvé políčko plánu na obrázku stenou s najmenším číslom nadol. Potom sme ju kotúlali naznačeným smerom po pláne. Pri každom dotyku kocky s plánom sme na políčko plánu napísali číslo, ktorým sa ho kocka dotkla. Ktorým číslom sa kocka mohla dotknúť zafarbeného políčka plánu, ak súčet všetkých napísaných čísel bol

1. najmenší možný,
2. najväčší možný?

(Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.)

(M. Dillingerová, L. Hozová)

Riešenie: Prvočísla menšie ako 20 sú 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Hľadáme tri dvojice z týchto prvočísel, ktoré majú rovnaký súčet, čo sú dvojice (11, 13), (7, 17) a (5, 19) so súčtom 24. Tieto dvojice predstavujú čísla na protiľahlých stenách kocky. Podľa zadania sme na prvé políčko plánu napísali číslo 5. Na obrázku sú vyznačené dvojice políčok, ktorých sa dotýkali protiľahlé steny kocky. Nech preklápame kocku akokoľvek, bude súčet všetkých



zapísaných čísel na pláne rovnaký, konkrétne $24 \cdot 8 = 192$. V oboch prípadoch sa teda mohla kocka dotknúť zafarbeného políčka ktorýmkoľvek z čísel 7, 11, 17 alebo 13, t.j. ktorýmkoľvek číslom okrem 19 a 5. Z čísla 5 sa preklopila a 19 je na protiľahlej stene k stene s číslom 5.

Hodnotenie: 1 bod za dvojice prvočísel; 3 body za úvahu o súčte napísaných čísel; 2 body za záver a odpoveď.

Z6-II-3

Traja záhradníci mali veľkú úrodu mrkvy a tak skúsili mrkvu odšťavovať. Po odšťavení všetku získanú šťavu naliali do 9 pohárov. Všetky boli plné, každý však mal iný objem: 1 dl, 2 dl, 3 dl, . . . , 9 dl. Chceli sa spravodlivo podeliť tak, aby každý dostal rovnaký počet pohárov i rovnako veľa šťavy. Ako to mohli urobiť?

(M. Volfová)

Riešenie: Šťavy bolo celkom $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ (dl). Každý z troch záhradníkov dostal rovnako veľa šťavy, t.j. 15 dl ($45 : 3 = 15$), a mal ju v troch pohároch ($9 : 3 = 3$). Pre každého záhradníka musíme vyjadriť číslo 15 ako súčet troch prirodzených jednociferných čísel. Žiadne dve z čísel 9, 8 a 7 nemôžu byť súčasne v jednej trojici, lebo súčet čísel tejto trojice by bol príliš veľký. V každej trojici teda musí byť práve jedno z uvedených čísel. Pýtame sa postupne, v ktorých trojiciach sa vyskytuje 9, v ktorých 8 a v ktorých 7:

$$\begin{array}{l} 9 + 5 + 1 \quad 9 + 4 + 2 \\ 8 + 6 + 1 \quad 8 + 5 + 2 \quad 8 + 4 + 3 \\ 7 + 6 + 2 \quad 7 + 5 + 3 \end{array}$$

Šťavu je možné záhradníkom rozdeliť iba dvomi spôsobmi:

- ak niektorý dostane $9+5+1$ (dl), musí dostať iný $8+4+3$ (dl) a posledný $7+6+2$ (dl),
- ak niektorý dostane $9+4+2$ (dl), musí dostať iný $8+6+1$ (dl) a posledný $7+5+3$ (dl).

Poznámka: Žiaci môžu nájsť trojice neusporiadaným experimentovaním, prípadne môžu predchádzajúcu úvahu robiť s ohľadom na najmenšie čísla.

Hodnotenie: 1 bod za stanovenie celkového množstva šťavy;
1 bod za výpočet množstva šťavy pripadajúceho na jedného záhradníka;
2 body za vypísanie všetkých prípustných trojíc alebo odpovedajúce zápisy;
po 1 bode za každú vyhovujúcu možnosť rozdelenia