1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$x + y = 1,$$
$$x - y = a,$$
$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme $2x = 1 + a$, odčítaním druhej rovnice od prvej $2y = 1 - a$. Odtiaľ

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \qquad y = \frac{1}{2}(1 - a). \tag{1}$$

Keď dosadíme za x a y do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4, \quad \text{čiže} \quad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

ktorú upravíme na tvar

$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0. \tag{2}$$

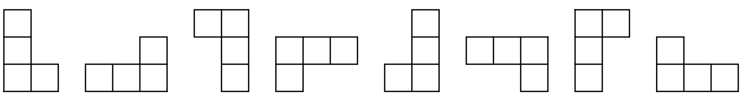
Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď $z = 0$, $a = -1$. Dosadením týchto hodnôt do (1) dostaneme $x = 0$, $y = 1$.

Záver. Daná sústava rovníc má riešenie iba pre $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za správne vyjadrenie x a y pomocou parametra a z prvých dvoch rovníc, 3 body za vyriešenie rovnice (2), ktorá vznikne dosadením týchto hodnôt do tretej rovnice a 1 bod za uvedenie správnej odpovede.

---

2. *Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď niektorého z tvarov na obr. 1. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď*



Obr. 1

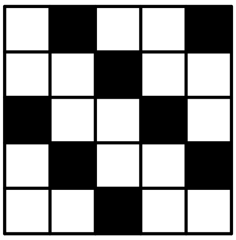
zasiahneme, hra končí.

a) *Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.*

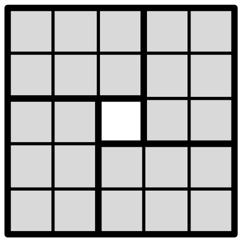
b) *Zdôvodnite, prečo žiadnych sedem otázok takú istotu nedáva.*

(Ján Mazák)

Riešenie. a) Stačí sa spýtať napríklad na čierne políčka na obr. 2: v každom riadku aj stĺpci sú vedľa seba najviac dve biele políčka, zatiaľ čo každá z lodí zakryje v jednom z oboch smerov pravé tri vedľa sebe stojace políčka. Aspoň jedno z nich teda bude čierne.



Obr. 2



Obr. 3

b) Na zásah lode na pláne s rozmermi 3×2 potrebujeme aspoň dve otázky, pretože žiadne jeho políčko neleží na všetkých lodiach, ktoré na tento plán môžeme umiestniť. Na pláne 5×5 môžeme vyznačiť štyri neprekrývajúce sa oblasti 3×2 (obr. 3). Aj keby loď bola umiestnená iba na jednej z týchto štyroch oblastí, sedem otázok na jej zásah by nestačilo – podľa predchádzajúcej úvahy totiž potrebujeme aspoň $4 \cdot 2 = 8$ otázok.

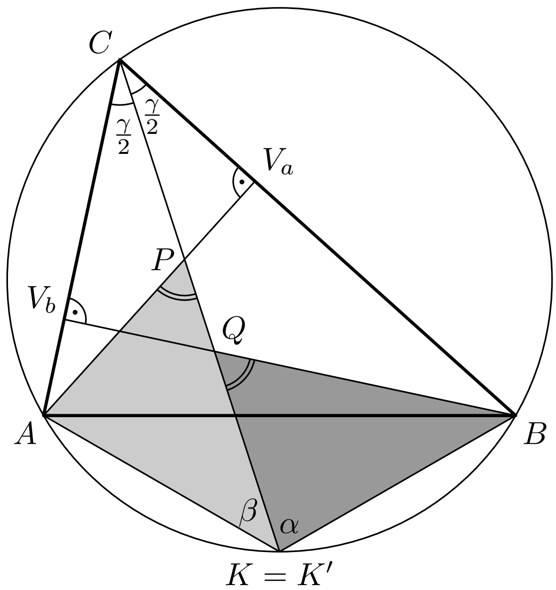
Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho za časť a) dajte najviac 2 body (a to aj za jednoduchý náčrtok bez ďalšieho zdôvodnenia), časť b) ohodnoťte najviac 4 bodmi.

---

3. *Je daný ostrouhlý trojuholník ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme K priesečník osi uhla ACB s osou strany AB. Priamka CK pretína výšky z vrcholov A a B v bodoch, ktoré označíme postupne P a Q. Predpokladajme, že trojuholníky AKP a BKQ majú rovnaký obsah. Určte veľkosť uhla ACB.*

(Ján Mazák)

Riešenie. Označme vnútorné uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom. Nech K' je druhý priesečník osi uhla ACB s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Zo zhodnosti obvodových uhlov ACK' a BCK' vyplýva zhodnosť zodpovedajúcich tetív AK' a BK', takže bod K' rozpoľuje oblúk AB ležiaci oproti vrcholu C, a je preto totožný s bodom K (obr. 4). Podľa vety o obvodových uhloch sú veľkosti uhlov AKC



Obr. 4

a BKC postupne rovné β a α. Označme V_a, V_b päty výšok prislúchajúcich vrcholom A, B trojuholníka ABC. Keďže ABC je ostrouhlý trojuholník, sú body V_a a V_b vnútorné body zodpovedajúcich strán. Veľkosť uhla APK je zhodná s veľkosťou vnútorného uhla pri vrchole P v pravouhlom trojuholníku CPV_a, je teda rovná $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Rovnakú veľkosť má analogicky aj uhol BQK.

Trojuholníky AKP a BKQ majú rovnaký obsah, zhodné strany AK a BK, a teda aj výšky na ne, a navyše sa zhodujú aj v uhle oproti nim. Z konštrukcie trojuholníka podľa danej strany, výšky na túto stranu a protiľahlého vnútorného uhla a zo súmernosti zostrojených riešení vyplýva, že trojuholník AKP je zhodný buď s trojuholníkom KBQ, alebo s trojuholníkom BKQ. Keďže trojuholník ABC nie je rovnoramenný (t. j. $\alpha \neq \beta$), je trojuholník AKP zhodný s trojuholníkom KBQ. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A trojuholníka PAK je $180° - \beta - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = 90° - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedenej zhodnosti vyplýva

$$90° - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha, \qquad \text{čiže} \qquad 90° + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Odtiaľ dostávame $\gamma = 60°$. Naopak ak $\gamma = 60°$, je $|\measuredangle APK| = |\measuredangle BQK| = 60°$ a trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, majú teda rovnaký obsah.

Záver. Uhol ACB má veľkosť $60°$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za zistenie, že K je stredom oblúka AB (dôkaz nie je nutný, ak študent uvedie, že ide o známu skutočnosť). Ďalej 1 bodom oceňte vyjadrenie veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníkoch AKP a BKQ pomocou α, β, γ. Ďalšie 2 body dajte za dôkaz zhodnosti trojuholníkov AKP a BKQ, 1 bod za výpočet uhla γ a 1 bod za dôkaz, že z podmienky $\gamma = 60°$ vyplýva zhodnosť (obsahov) trojuholníkov AKP a KBQ.

---

4. *K ľubovoľnému prirodzenému číslu určíme jeho zvyšky po delení každým z desiatich prirodzených čísel* $2, 3, 4, \dots, 11$ *a týchto desať zvyškov (niektoré môžu byť nulové) sčítame. Určte všetky také čísla menšie ako* $25\,000$*, ktoré majú uvedený súčet čo najmenší. (Nulu za prirodzené číslo nepovažujeme).*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Uvažujme prirodzené číslo $n < 25\,000$ a označme r_2, r_3, …, r_{11} jemu prislúchajúce zvyšky po delení číslami 2, 3, …, 11. Súčet nezáporných zvyškov $z = r_2 + r_3 + \dots + r_{11}$ je tiež nezáporný. V danom prípade však nemôže byť rovný 0, pretože to by znamenalo, že číslo n je deliteľné každým z prvkov množiny $\mathsf{M} = \{2, 3, 4, \dots, 11\}$, ktorých najmenší spoločný násobok je $27\,720 > 25\,000$.

Ukážeme, že najmenší možný súčet je 1, a zároveň nájdeme aj všetky čísla n menšie ako 25 000 s touto vlastnosťou.

Ak je príslušný súčet rovný 1, sú všetky zvyšky r_k s výnimkou jedného rovné 0, a existuje teda práve jedno $d \in \mathsf{M}$ také, že $r_d = 1$. Ukážeme, že $d = 7$ alebo $d = 11$. Zrejme nemôže byť $d \leqq 5$, to by totiž nenulový zvyšok prislúchal aj číslu $2d \in \mathsf{M}$. Keby zvyšok 1 prislúchal jednému z čísel $d = 6, 8, 9, 10$, prislúchal by nutne aj jednému z čísel 2 alebo 3.

Ak $d = 7$, musí byť hľadané číslo násobkom všetkých čísel z množiny $\mathsf{M} \setminus \{7\}$, teda násobkom čísla 3 960. Toto číslo dáva po delení 7 zvyšok 5, zvyšok 1 dáva jeho trojnásobok $n = 3 \cdot 3\,960 = 11\,880$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy, a všeobecne každý $(3 + 7a)$-násobok; avšak ďalší násobok $10 \cdot 3\,960$ s vyhovujúcim zvyškom je už väčší ako 25 000.

Ak $d = 11$, musí byť hľadané číslo násobkom všetkých čísel z množiny $\mathsf{M} \setminus \{11\}$, teda násobkom čísla 2 520. Keďže toto číslo dáva po delení 11 zvyšok 1, vyhovuje pre $d = 11$ jedine ono (ďalší násobok $(1 + 11) \cdot 2\,520$ s vyhovujúcim zvyškom je totiž už väčší ako 25 000).

Záver. Hľadané čísla sú dve, a to 11 880 a 2 520.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, za dôkaz, že súčet zvyškov je aspoň jedna, dajte 1 bod, za dôkaz, že hľadané číslo je deliteľné všetkými číslami z M okrem 7 alebo 11, pre ktoré dáva zvyšok 1, dajte 3 body, za nájdenie zodpovedajúcich čísel 11 880 a 2 520 dajte po 1 bode. Ak riešiteľ ukáže, že súčet zvyškov je aspoň 1, a uvedením jedného z vyhovujúcich čísel ukáže, že najmenší súčet zvyškov je skutočne 1, ohodnoťte jeho riešenie 3 bodmi (lebo úlohou bolo nájsť *všetky* vyhovujúce čísla).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.