1. *Isté štvorciferné prirodzené číslo je deliteľné siedmimi. Ak zapíšeme jeho číslice v opačnom poradí, dostaneme väčšie štvorciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné siedmimi. Navyše po delení číslom 37 dávajú obe spomenuté štvorciferné čísla rovnaký zvyšok. Určte pôvodné štvorciferné číslo.*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme hľadané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ a číslo s opačným poradím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Obe čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 37, preto je ich rozdiel

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d - a) + 90(c - b) = 37 \cdot 27(d - a) + 90(c - b) \end{aligned} \tag{1}$$

deliteľný číslom 37, čiže $37 \mid 90(c - b)$. Keďže 37 je prvočíslo a číslo 90 nie je jeho násobkom, nutne $37 \mid c - b$. To je pre číslice b, c možné len v prípade, že $b = c$. Naopak, ak $b = c$, tak z vyjadrenia (1) je zrejmé, že rozdiel $k - n$ je deliteľný číslom 37, t. j. čísla n a k dávajú po delení 37 rovnaký zvyšok. Môžeme teda položiť $n = \overline{abbd}$, $k = \overline{dbba}$ a ďalej sa už zaoberať len podmienkami o deliteľnosti siedmimi.

Keďže sú siedmimi deliteľné obe čísla n, k, je siedmimi deliteľný aj ich rozdiel. Dosadením $c = b$ do vyjadrenia (1) dostávame

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d - a).$$

Rovnakou úvahou ako predtým (7 je prvočíslo a $37 \cdot 27$ nie je jeho násobkom) dostávame $7 \mid d - a$. Navyše zo zadanej podmienky $k > n$ vyplýva $d > a$; nemôže byť ani $d = a$, inak by sme mali $n = \overline{abbd} = \overline{dbba} = k$. Číslice a, d preto musia spĺňať vzťah $d - a = 7$. Prípustné sú len dve možnosti: $a = 1$, $d = 8$, alebo $a = 2$, $d = 9$. (Prípad $a = 0$, $d = 7$ je vylúčený, lebo a je začiatočnou číslicou čísla n.)

Ak $a = 1$, $d = 8$, budú čísla

$$n = \overline{1bb8} = 1008 + 110b = 7 \cdot 144 + 110b,$$
$$k = \overline{8bb1} = 8001 + 110b = 7 \cdot 1143 + 110b$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 1008$ alebo $n = 1778$.

Ak $a = 2$, $d = 9$, budú čísla

$$n = \overline{2bb9} = 2009 + 110b = 7 \cdot 287 + 110b,$$
$$k = \overline{9bb2} = 9002 + 110b = 7 \cdot 1286 + 110b$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 2009$ alebo $n = 2779$.

Odpoveď. Hľadané štvorciferné číslo je niektoré zo štvorice 1008, 1778, 2009, 2779.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 2 body dajte za zdôvodnenie podmienky $b = c$, 2 body za odvodenie vzťahu $d - a = 7$ a 2 body za zdôvodnenie $7 \mid b$. Ak riešenie pozostáva z odvodenia nutných podmienok bez zmienky o tom, že sú aj postačujúce, je nutná skúška a v prípade jej opomenutia dajte len 5 bodov.

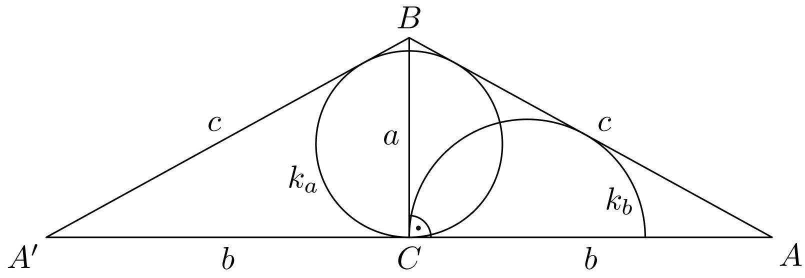
2. *Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc k_a, k_b. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme ϱ_a, ϱ_b. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť*

$$\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b} \geqq p\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big)$$

platí pre všetky pravouhlé trojuholníky.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme vrcholy daného trojuholníka A, B, C tak, aby vrcholy A, B ležali postupne oproti odvesnám dĺžok a, b.



Obr. 1

Najprv vypočítame veľkosti polomerov polkružníc k_a a k_b. Označme A' obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky BC. Kružnica k_a je vpísaná do trojuholníka ABA' (obr. 1). Rovnoramenný trojuholník ABA' má obvod $o=2(b+c)$ a obsah $S=ab$, preto polomer kružnice k_a vypočítame podľa známeho vzťahu

$$\varrho_a=\frac{2S}{o}=\frac{ab}{b+c}.$$

Podobne vypočítame polomer kružnice k_b, dostaneme $\varrho_b=ab/(a+c)$.

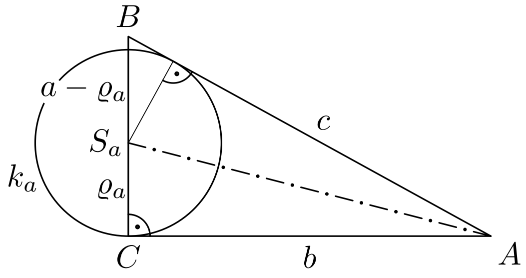
Pre p a pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b a preponou c má platiť

$$p \leqq \frac{\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b+c}{ab}+\frac{a+c}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{a+b+2c}{a+b}=1+\frac{2c}{a+b}=1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Voľbou $a=b$ dostávame $p\leqq 1+2\sqrt{2a^2}/2a=1+\sqrt{2}$. Ukážeme, že pre $p=1+\sqrt{2}$ je zadaná nerovnosť vždy splnená. Naozaj, z uvedeného výpočtu a z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom dostávame

$$\frac{\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}=1+\frac{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{2}}{a+b}\geqq 1+\frac{2\frac{a+b}{2}\sqrt{2}}{a+b}=1+\sqrt{2}.$$

Odpoveď. Najväčšie reálne číslo také, že zadaná nerovnosť platí pre všetky pravouhlé trojuholníky, je $p=1+\sqrt{2}$.



Obr. 2

Poznámka. Veľkosť polomerov ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítať aj inými spôsobmi, napríklad takto: Nech c je dĺžka prepony. Stredy S_a, S_b polkružníc k_a, k_b ležia na osiach uhlov CAB a CBA. Je známe, že os uhla delí v trojuholníku protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. V našom prípade (obr. 2) dostávame $|S_aC|/|S_aB| = |AC|/|AB|$, t. j.

$$\frac{\varrho_a}{a - \varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkiaľ úpravou ľahko vyjadríme $\varrho_a = ab/(b + c)$. Analogicky vypočítame ϱ_b.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za výpočet veľkostí polomerov ϱ_a a ϱ_b, 1 bod za nájdenie hodnoty $p = 1 + \sqrt{2}$ a 3 body za dôkaz nerovnosti zo zadania pre $p = 1 + \sqrt{2}$.

---

3. *Určte veľkosti vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka, pre ktoré platí*

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha &= 1,\\ 2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) - \cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Podobne ako pri riešení prvej úlohy domáceho kola, využitím známych súčtových vzorcov goniometrických funkcií pre ľubovoľné reálne čísla x, y dostávame

$$\begin{aligned} 2\sin y\sin(x+y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) - \cos x =\\ &= 2\sin y\cos y\sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x =\\ &= \sin 2y\sin x - \cos 2y\cos x =\\ &= -\cos(x+2y). \end{aligned}$$

Z podmienok úlohy potom pre veľkosti vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka platí

$$\cos\alpha - 2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+2\beta) = -1, \tag{1}$$
$$\cos\beta - 2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) = \cos(\beta+2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka ležia v intervale $(0, \pi)$, z čoho vyplývajú nerovnosti $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$.[1] Ich spojením s (1) máme $\alpha + 2\beta = \pi$. Odtiaľ

$$\gamma = \pi - (\alpha+\beta) = \pi - (\alpha+2\beta) + \beta = \pi - \pi + \beta = \beta.$$

---

[1] Platí dokonca $\alpha + 2\beta < 2\pi$, lebo $\alpha + \beta = \pi - \gamma < \pi$.

Dosadením do (2) dostávame

$$\cos 3\beta = 0. \tag{3}$$

Uhol β je ostrý, lebo je zhodný s uhlom γ a trojuholník nemôže mať dva pravé, resp. dva tupé vnútorné uhly. Teda $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, a vzhľadom na (3) máme $3\beta = \frac{1}{2}\pi$, čiže $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Ľahko dopočítame $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Skúškou (ktorá však pri uvedenom postupe nie je nutná) ľahko overíme, že táto trojica α, β, γ spĺňa všetky podmienky zadania.

Odpoveď. Podmienkam úlohy vyhovuje trojuholník, ktorého veľkosti vnútorných uhlov (uvedené v stupňoch) sú $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj iným postupom. Z druhej rovnice sústavy sa dá odvodiť vzťah $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = -1$, z ktorého vyplýva $\alpha - \gamma = \pm\frac{1}{2}\pi$. Pre každú z oboch možností znamienka dosadením do prvej rovnice získame kubickú rovnicu v premennej $t = \sin\gamma$, ktorú možno vyriešiť uhádnutím koreňov.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie vzťahov (1), (2) dajte 2 body, ďalšie 2 body za vzťah $\beta = \gamma$ a posledné 2 body za dopočítanie veľkostí jednotlivých uhlov. Ak žiakov postup vyžaduje urobenie skúšky, za jej vynechanie strhnite 1 bod. Po jednom bode tiež strhnite, ak je niektorá z rovností $\alpha + 2\beta = \pi$, resp. $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ (vyplývajúca z hodnôt príslušných kosínusov) odvodená bez spomenutia potrebných nerovností $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$, resp. $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$.

Ak žiak úlohu rieši postupom naznačeným v poznámke, za odvodenie vzťahu $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = -1$ dajte 1 bod a za odvodenie rovnosti $\alpha - \gamma = \pm\frac{1}{2}\pi$ ďalšie 2 body. Po jednom bode dajte za úspešné vyriešenie každej z dvoch kubických rovníc a posledný bod za správne dopočítanie veľkostí uhlov a urobenie skúšky.

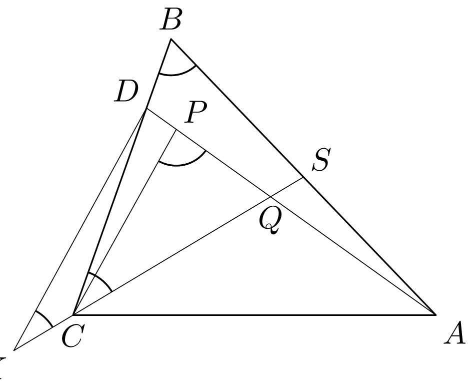
---

4. *Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC zvoľme bod D a na úsečke AD bod P tak, aby neležal na ťažnici z vrcholu C. Priamka tejto ťažnice pretne kružnicu opísanú trojuholníku CPD v bode, ktorý označíme K ($K \neq C$). Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKP prechádza okrem bodu A ďalším pevným bodom, ktorý od výberu bodov D a P nezávisí.*

(Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme Q priesečník úsečky AD a ťažnice z vrcholu C (teda Q je „zakázaná" poloha bodu P). Sú dve možnosti, kde môže ležať bod P: vnútri úsečky DQ alebo vnútri úsečky QA. Ukážeme, že v oboch prípadoch prechádza kružnica opísaná trojuholníku AKP bodom M súmerne združeným s bodom C podľa stredu strany AB (ktorého poloha samozrejme od výberu bodov D a P nezávisí).

Uvažujme ako prvý prípad, keď bod P leží vnútri úsečky DQ. Dokážme najskôr, že potom bod K leží vnútri úsečky CQ. Nech S je stred strany AB. Bod K nemôže ležať vnútri polpriamky opačnej k polpriamke QC, v takom prípade by totiž bod P ležal vnútri trojuholníka CKD, t. j. body C, K, D, P by v žiadnom prípade nemohli ležať na jednej kružnici. Zadanie triviálne vylučuje aj možnosti $K = Q$ a $K = C$. Ostáva vylúčiť možnosť, že K leží vnútri polpriamky opačnej k polpriamke CQ (obr. 3). Ak by



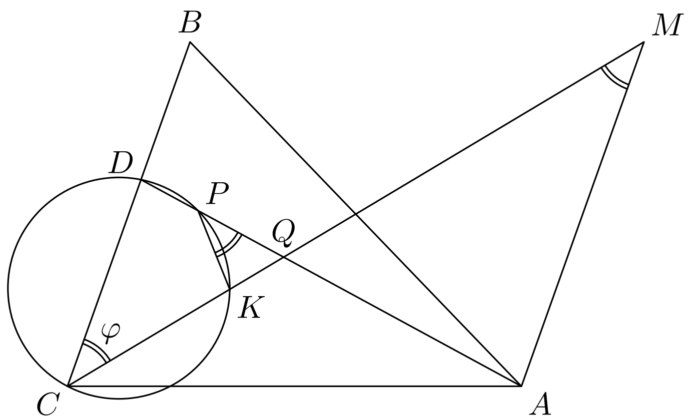
Obr. 3

to tak bolo, tak by body K a P ležali v opačných polrovinách určených priamkou DC a uhly DKC a CPA by museli mať rovnakú veľkosť, aby bol štvoruholník $DKCP$ tetivový. Pri uvažovanej polohe bodov však zrejme platí

$$|\angle DKC| < |\angle DCS| \qquad \text{a} \qquad |\angle CBS| = |\angle CBA| < |\angle CPA|.$$

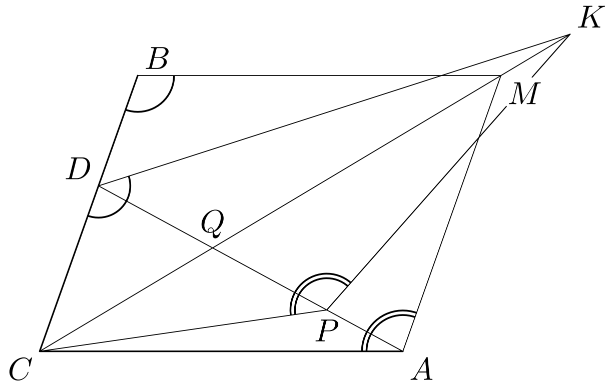
Z ostrouhlosti trojuholníka ABC vyplýva $|\angle DCS| < |\angle CBS|$ (lebo $|CS| > |BS|$, keďže C leží zvonka Tálesovej kružnice so stredom S a priemerom AB). Spolu máme $|\angle DKC| < |\angle CPA|$.

Bod K teda musí ležať vnútri úsečky CQ (obr. 4). Označme φ veľkosť uhla KCB. Body C a P sú protiľahlými vrcholmi tetivového štvoruholníka $CDPK$, preto $|\angle DPK| = 180° - \varphi$. Z toho dostávame $|\angle APK| = \varphi$. Rovnakú veľkosť ako uhol APK má aj uhol AMC, pretože priamky AM a BC sú rovnobežné. Zrejme body P a M ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku AK (oba totiž ležia v polrovine AKQ). Z rovnosti $|\angle APK| = |\angle AMK|$ potom vyplýva, že body A, K, P a M ležia na kružnici.



Obr. 4

V druhom prípade leží bod P vnútri úsečky QA. Dokážme, že potom K leží vnútri úsečky QM. Bod K samozrejme musí ležať na polpriamke opačnej k polpriamke QC, t. j. na polpriamke QM. Stačí vylúčiť možnosť, že K leží až „za“ bodom M, čiže na polpriamke opačnej k polpriamke MQ (obr. 5). Ak by to tak bolo, zrejme by s využitím



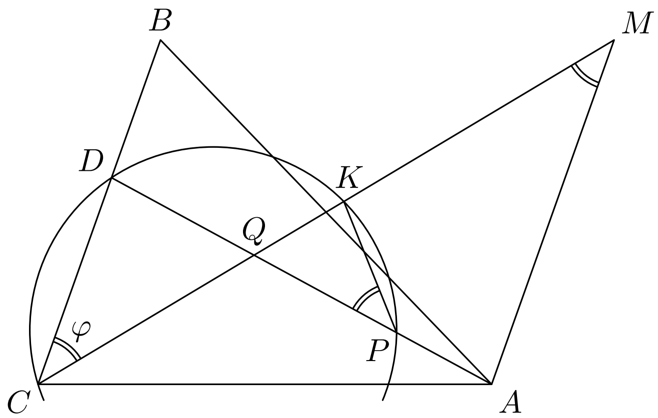
Obr. 5

ostrosti uhla γ v trojuholníku ABC platilo

$$|\measuredangle CDK| > |\measuredangle CBM| = 180^\circ - \gamma > 90^\circ \quad \text{a} \quad |\measuredangle CPK| > |\measuredangle CAM| = 180^\circ - \gamma > 90^\circ.$$

Odtiaľ $|\measuredangle CDK| + |\measuredangle CPK| > 180^\circ$, čo nie je možné vzhľadom na tetivovosť štvoruholníka $CPKD$ (súčet veľkostí protiľahlých uhlov musí byť rovný 180°).

Bod K teda musí ležať vnútri úsečky QM (obr. 6). Označme opäť φ veľkosť uhla KCB. Uhly DCK a DPK sú obvodové uhly nad tetivou DK, čiže $|\measuredangle DPK| = \varphi$ a $|\measuredangle APK| = 180^\circ - \varphi$. Uhol AMC má veľkosť φ. Priamka AK oddeľuje body Q a M, preto body P a M ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na túto priamku. Takže $APKM$ je tetivový štvoruholník, lebo uhly pri protiľahlých vrcholoch P a M majú súčet 180°.



Obr. 6

Iné riešenie. Dokážeme tvrdenie bez predpokladu ostrouhlosti trojuholníka ABC. Označme body Q a M rovnako ako v prvom riešení. Nevýhodou predošlého postupu je, že musíme rozoberať veľa možností a zdôvodňovať, že štvorice bodov ležia na uvažovaných kružniciach v správnom poradí (pritom pri tupouhlom trojuholníku ABC môže bod K ležať aj na polpriamke opačnej k polpriamke CQ, resp. MQ). Namiesto obvodových uhlov využijeme mocnosť bodu ku kružnici. Z nej pre bod Q a kružnicu opísanú štvorici bodov C, P, D, K dostávame (bez ohľadu na polohu bodu P) $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, teda $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojuholníkov

QDC a QAM, ktorá vyplýva z rovnobežnosti priamok BC a AM, máme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí teda

$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|},$$

odkiaľ $|QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|$. Z tejto rovnosti a zo známeho „obráteného" tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici už priamo vyplýva, že body K, M, P, A ležia na jednej kružnici, bez ohľadu na to, či bod Q leží vnútri oboch úsečiek KM, PA, alebo mimo oboch týchto úsečiek. (Zrejme nie je možné, aby ležal vnútri jednej z nich a mimo druhej z nich; na dôkaz toho stačí rozlíšiť dve možné polohy bodu P na úsečke DA podobne ako v prvom riešení).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za objavenie pevného bodu M. Ak žiak spraví dôkaz len pre jeden z prípadov uvedených v prvom riešení, udeľte 5 bodov. Ak žiak bez zdôvodnenia predpokladá správnu polohu bodov P a M vzhľadom na priamku AK, strhnite 1 bod (čiže treba dať 5 bodov za dôkaz pre oba prípady alebo 4 body, ak sa žiak zaoberá len jedným z uvedených prípadov). Pri riešení využívajúcom mocnosť bodu ku kružnici strhnite 1 bod, ak žiak nezdôvodní, že bod Q leží buď vnútri oboch úsečiek KM, PA, alebo mimo oboch týchto úsečiek. Riešenia iného typu ako uvedené hodnoťte v súlade s touto schémou.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.